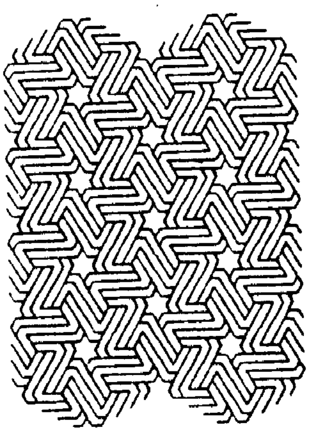
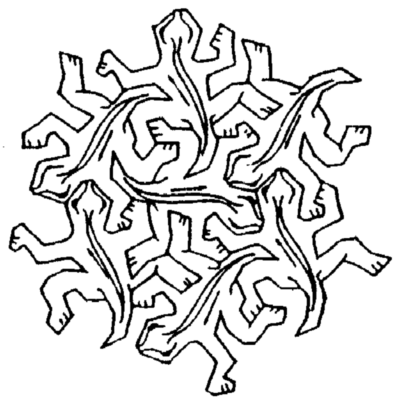
ORNAMENTE

Maria KOTH

1) GRUNDBEGRIFFE :

Ebene Flächen kann man auf verschiedenartigste Weise regelmäßig parkettieren, das heißt durch Wiederholung bestimmter Formen lückenlos und überlappungsfrei überdecken. Besonders schöne Beispiele haben die mittelalterlichen islamischen Baumeister der Alhambra sowie der zeitgenössische holländische Künstler M.C Escher geschaffen:


Mathematisch werden die Symmetrieeigenschaften von Flächenornamenten durch **diskrete Bewegungsgruppen** der Ebene beschrieben: Betrachtet man eine Figur der Ebene, so bildet die Gesamtheit aller Bewegungen, die die Figur in sich überführen, eine Gruppe, die sogenannte **Symmetriegruppe** der Figur. Als Bewegungen können Translationen, Drehungen, Geradenspiegelungen und Gleitspiegelungen auftreten. So besteht etwa die Symmetriegruppe eines Quadrates aus vier Drehungen um 0°, 90°, 180° und 270° um den Quadratmittelpunkt und aus vier Spiegelungen an den Diagonalen bzw. an den Seitensymmetralen.

Enthält eine Bewegungsgruppe keine (von der Identität verschiedenen) beliebig kleinen Drehungen oder Translationen, so nennt man sie **diskret** (Nicht diskret ist zum Beispiel die Symmetriegruppe einer Geraden oder die eines Kreises).

Unter einem **Ornament** versteht man nun eine Figur der Ebene, deren Symmetriegruppe

1) diskret ist und
2) (mindestens) zwei nicht-parallele Translationen

enthält.

Ein einfaches Beispiel ist die schachbrettartige Pflasterung der Ebene mit Quadraten. Hier führen die Deckbewegungen der einzelne Quadrate das gesamte Muster in sich über. Die Symmetriegruppe des Ornaments enthält daneben aber auch Drehungen um 180°, echte Gleitspiegelungen und Translationen.

Überschaubar wird die große Vielfalt möglicher Ornamente, wenn man sich auf die Betrachtung der zugehörigen Symmetriegruppen beschränkt. Es stellt sich nämlich heraus, daß es für die Symmetriegruppe eines Ornaments, die auch als **Ornamentgruppe** oder **kristallographische Gruppe des R^2** bezeichnet wird, bis auf affine Äquivalenz nur siebzehn verschiedene Möglichkeiten gibt. Die Klassifikation der siebzehn Ornamentgruppen geht auf den Kristallographen E.S.Fedorov zurück ("Symmetrie in der Ebene", 1891), die vollständige mathematische Behandlung auf G. Polya ([4],1924).

Aus der Definition eines Ornaments folgt unmittelbar, daß die Symmetriegruppe eine Translationsuntergruppe hat, die von zwei linear unabhängigen Translationen erzeugt wird: Wendet man auf einen beliebigen Punkt der Ebene alle Translationen der Ornamentgruppe an, so entsteht ein doppelt periodisches Punktnetz, das **Translationsgitter**. Da eine Drehung höchstens dann ein Gitter in sich überführen kann, wenn sie 1, 2, 3, 4 oder 6-zählig ist, folgt, daß eine Ornamentgruppe nur Drehungen um 180°, 120°, 90° oder 60° enthalten kann (**Satz über die kristallographische Beschränkung**, Barlow 1901).

2) DIE SIEBZEHN ORNAMENTGRUPPEN :

Einen guten Überblick über die Symmetriegruppe eines Ornaments gibt die zugehörige **Symmetriekarte**, eine aus der Kristallographie stammende Darstellung der Symmetrieelemente mit Hilfe bestimmter Symbole: Eine durchgezogene Linie markiert eine vorhandene Spiegelachse. Gleitspiegelachsen, die keine Spiegelachsen sind, werden durch strichlierte Linien dargestellt. Kleine regelmäßige n-Ecke geben die Lage der n-zähligen Drehpunkte an, und 2 Pfeile kennzeichnen erzeugende Elemente des Translationsgitters.

Auch die internationalen Bezeichnungen der Ornamentgruppen (P4, PG, PMM, ...) stammen aus der Kristallographie und deuten auf vorhandene Symmetrien hin (z.B. M = mirror, G = Gleitachse, 4 = 4-zähl. Drehzentren).

Im folgenden wird jede der siebzehn Gruppen durch ihre Symmetriekarte und ein konkretes Beispiel für ein zugehöriges Ornament vorgestellt. Auch in den Ornamentbeispielen sind die vorhandenen Symmetrieelemente gekennzeichnet (nur bei symmetriereicheren Gruppen wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Angabe der reinen Gleitachsen verzichtet). Außerdem ist in jedem Beispiel ein das Ornament erzeugender **Fundamentalbereich** schraffiert.

a) Gruppen ohne Drehungen: P1, PM, PG, CM

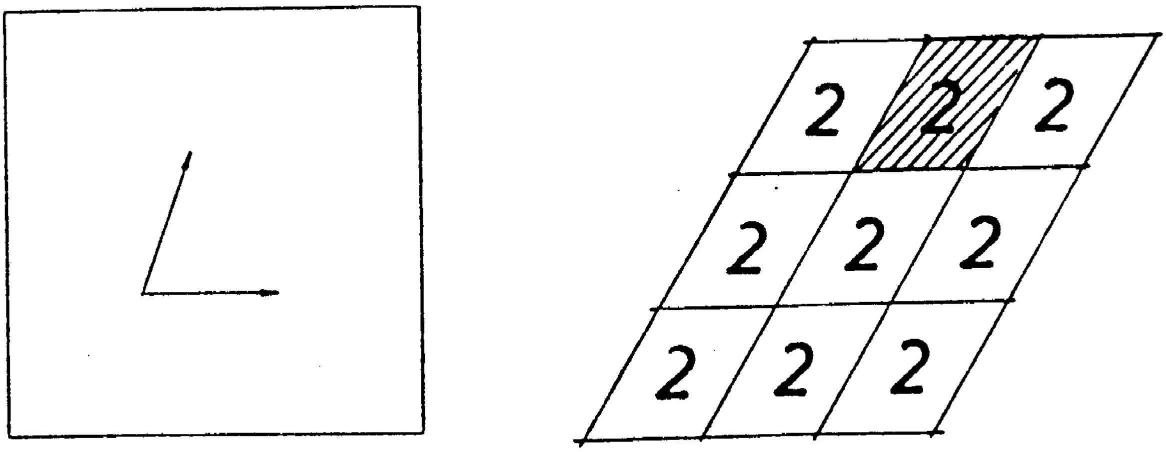
Hier gibt es vier Möglichkeiten: Gibt es keine gegensinnigen Kongruenzen, so wird die Gruppe von zwei Translationen erzeugt, und der Fundamentalbereich ist ein Parallelogramm (**Gruppe P1**). P1 ist Untergruppe jeder Ornamentgruppe.

Gegensinnige Kongruenzen sind nach elementargeometrischen Überlegungen nur dann möglich, wenn das Translationsgitter rhombisch oder rechteckig ist. Im ersten Fall müssen die Spiegelachsen bzw. Gleitspiegelachsen parallel zu einer Rhombusdiagonale, im zweiten Fall parallel zu einer Rechteckseite liegen. Da es keine Drehungen geben soll, müssen außerdem alle vorhandenen Spiegel- bzw. Gleitachsen zueinander parallel sein.

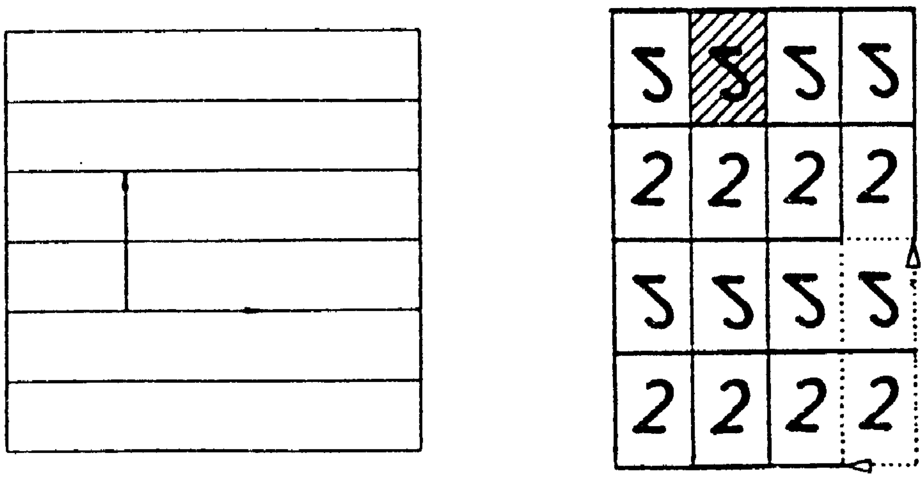
Ist nun das Translationsgitter rechteckig, so erhält man die **Gruppe PM** mit einer Schar zueinander paralleler Spiegelachsen im Abstand der halben anderen Rechtecksseite bzw die

Gruppe PG mit einer Schar paralleler Gleitachsen.

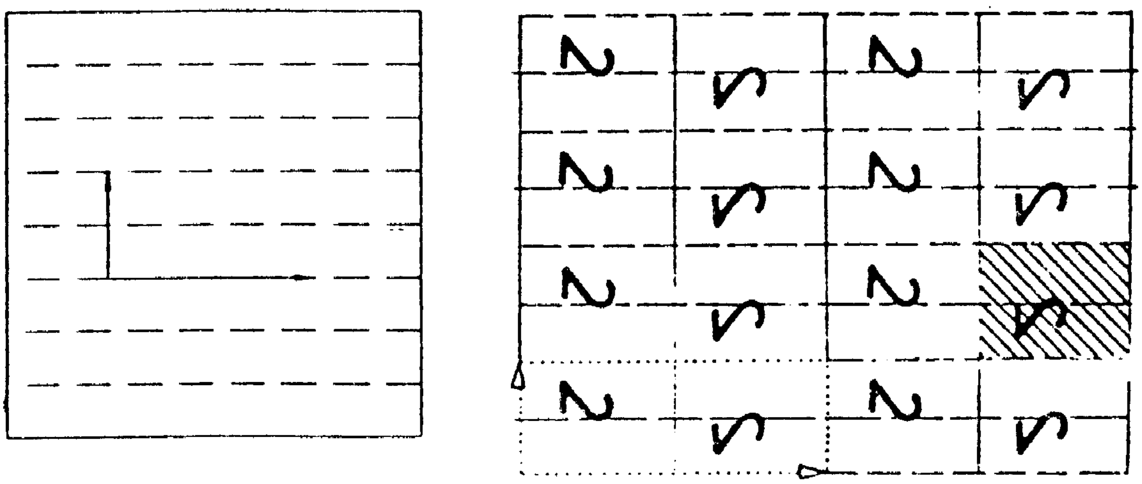
Ist das Translationsgitter rhombisch, so ist nur die Gruppe CM möglich, die sowohl eine Schar Spiegelachsen als auch eine Schar Gleitachsen enthält.



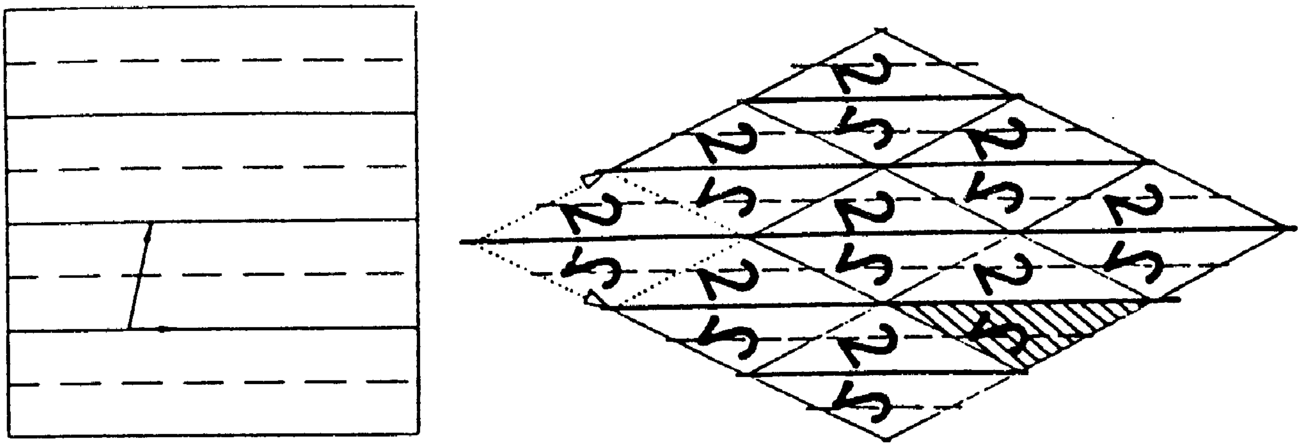
GRUPPE P1



GRUPPE PM



GRUPPE PG



GRUPPE CM

b) Gruppen mit nur zweizähligen Drehzentren:

P2, PMM, PGG, PMG, CMM

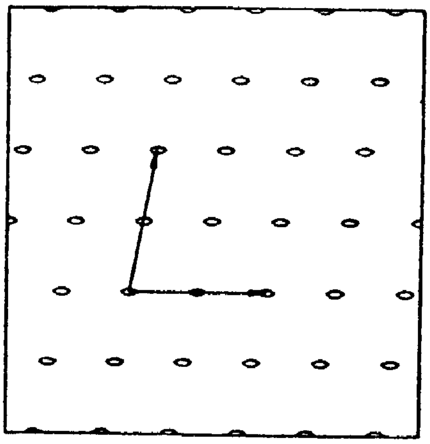
Die **Gruppe P2** enthält nur Translationen und Drehungen um 180°, wobei die Drehzentren ein Netz mit den halben Abmessungen des Translationsgitters bilden.

Für Gruppen mit gegensinnigen Kongruenzen und rechteckigem Translationsgitter gibt es hier drei Möglichkeiten: Die **Gruppe PMM** ist eine Kombination der Gruppen P2 und PM und enthält zwei aufeinander normal stehende Scharen von Spiegelachsen, die durch die Drehpunkte verlaufen.

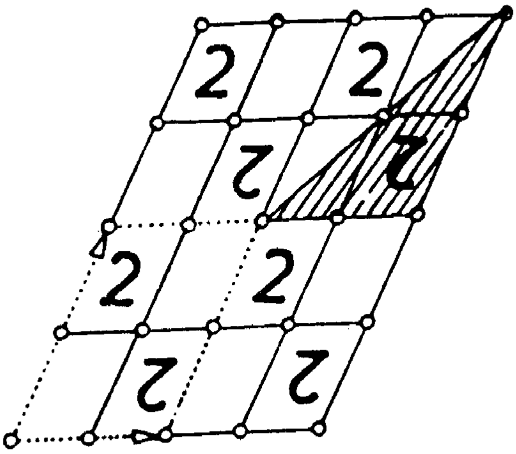
Die **Gruppe PGG** ist eine Kombination der Gruppen P2 und PG und enthält zwei aufeinander normal stehende Scharen von Gleitachsen.

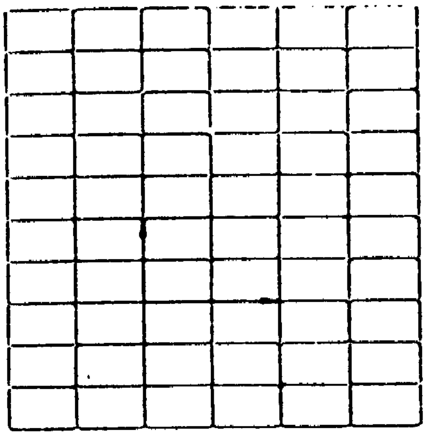
In der **Gruppe PMG** gibt es eine Schar von Spiegelachsen und normal dazu eine Schar Gleitachsen. Diese Gruppe ist eine Kombination von P2, PM und PG.

Gegensinnige Kongruenzen und ein rhombisches Translationsgitter hat nur die **Gruppe CMM**, die als Kombination von P2 und CM zwei Scharen aufeinander normal stehender Spiegelachsen und zwei Scharen aufeinander normalstehender Gleitachsen enthält.

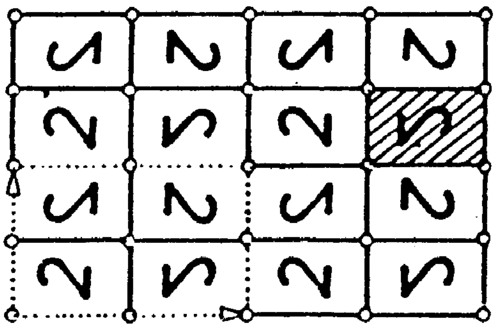


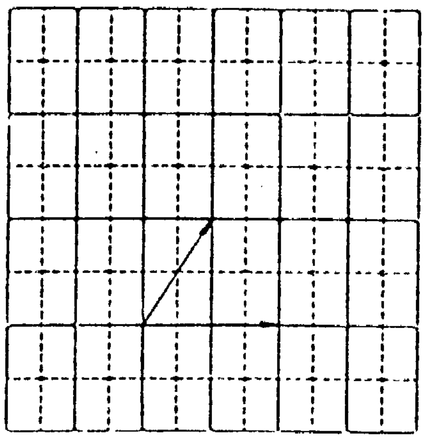
GRUPPE P2



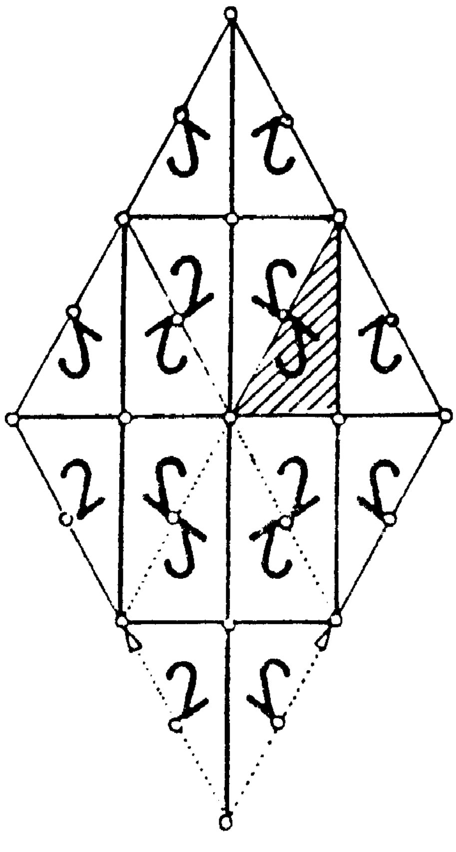


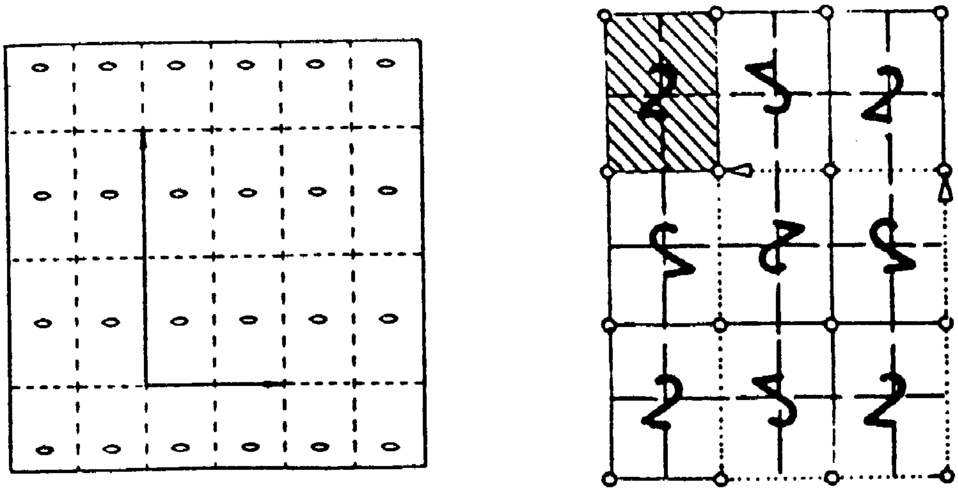
GRUPPE PMM



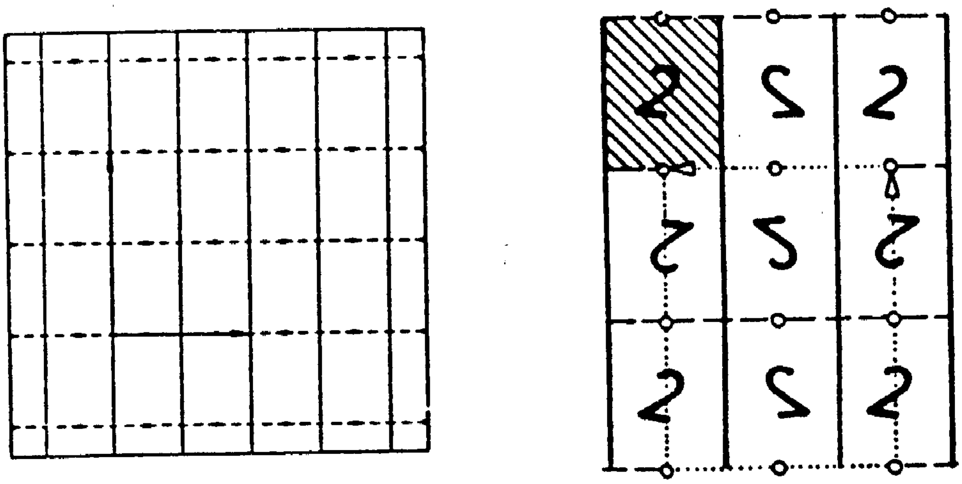


GRUPPE CMM





GRUPPE PGG

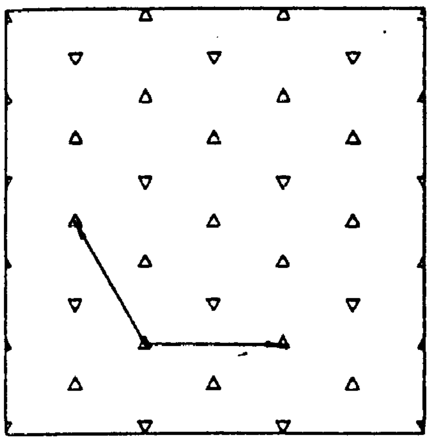


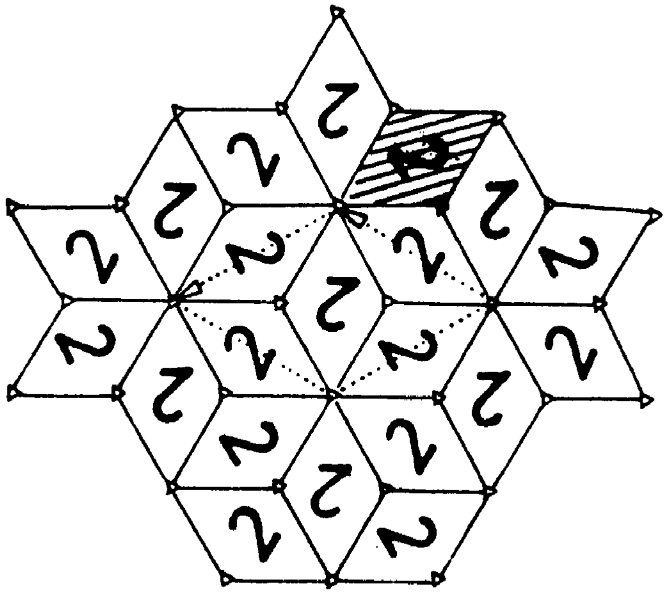
GRUPPE PMG

<u>c) Gruppen mit nur dreizähligen Drehzentren:</u> P3, P3M1, P31M

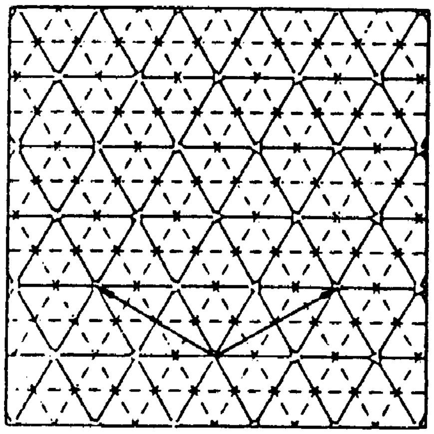
Die <u>Gruppe P3</u> enthält nur Translationen und Drehungen um ±120°. Das Translationsgitter ist hexagonal (dh rhombisch mit einem aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzten Fundamentalrhombus). Auch die Drehzentren bilden ein hexagonales Netz.

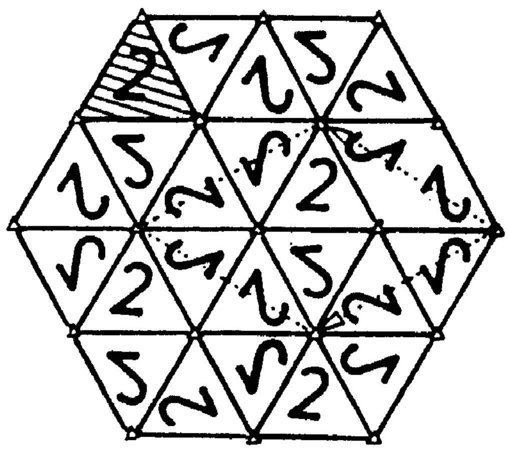
Daneben gibt es zwei Gruppen mit gegensinnigen Kongruenzen. Beide sind Kombinationen von P3 und CM und enthalten zusätzlich zu den Symmetrieelementen von P3 drei Scharen Spiegelachsen und drei Scharen echte Gleitachsen. Sie unterscheiden sich in der Anordnung der Achsen: Bei der <u>Gruppe P31M</u> liegt nur ein Teil der Drehzentren auf Spiegelachsen, bei der <u>Gruppe P3M1</u> dagegen alle.



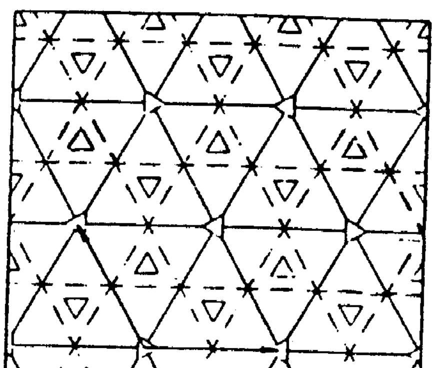


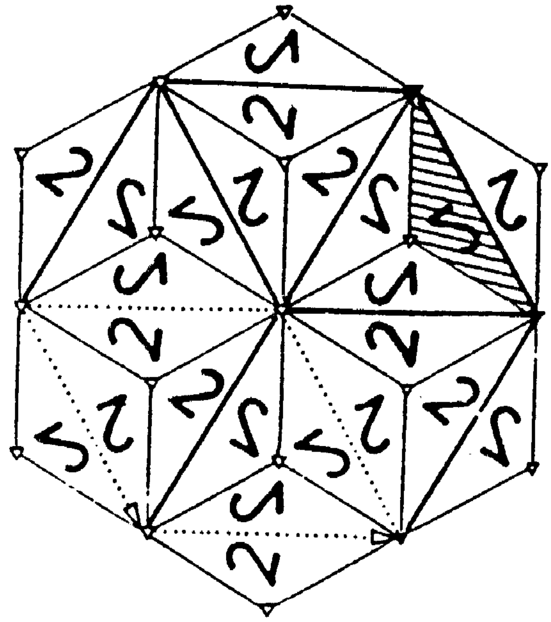
GRUPPE P3





GRUPPE P3M1





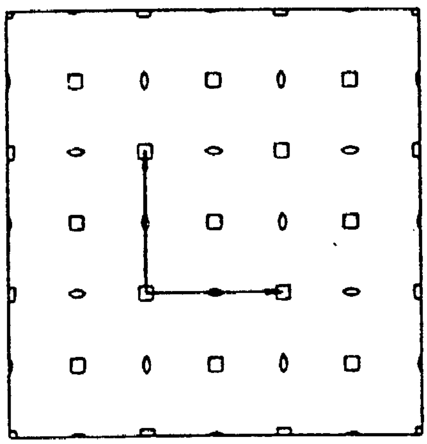
GRUPPE P31M

d) Gruppen mit vierzähligen Drehzentren: P4, P4M, P4G

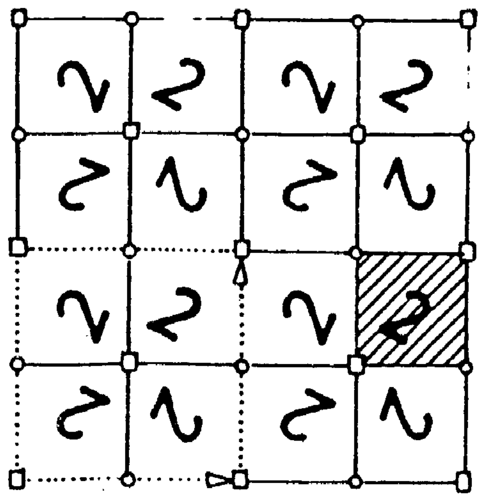
Bei allen diesen Gruppen ist das Translationsnetz quadratisch. Die **Gruppe P4** enthält nur Translationen und Drehungen um ±90° und 180°. Auch die Drehzentren bilden ein quadratisches Gitter.

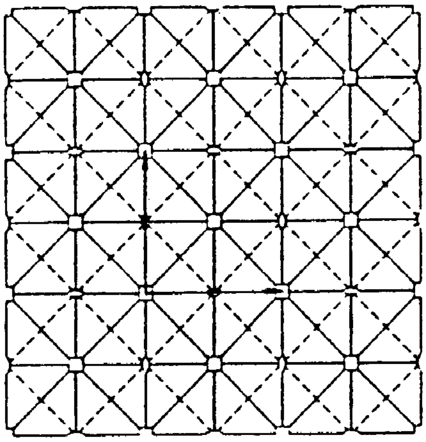
Die **Gruppe P4M** ist eine Kombination der Gruppen P4, PMM und CMM und enthält vier parallele Scharen von Spiegelachsen sowie zwei Scharen Gleitachsen. Alle Spiegelachsen verlaufen durch vierzählige Drehzentren, und alle Drehzentren liegen auf Spiegelachsen.

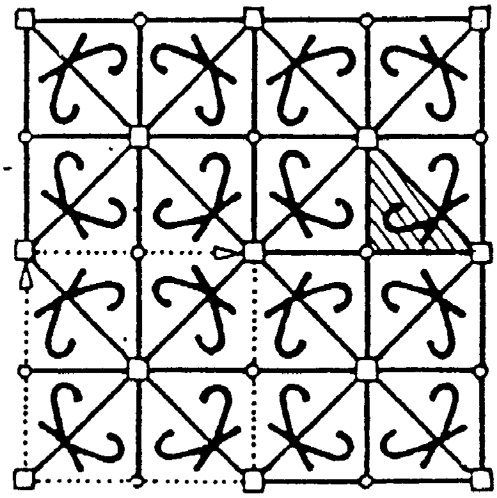
Daneben gibt es nur die **Gruppe P4G**, die als Kombination von P4, PGG und CMM vier Scharen Gleitachsen und zwei Scharen Spiegelachsen enthält. Im Unterschied zu P4M liegt hier kein einziger vierzähliger Drehpunkt auf einer Spiegelachse.



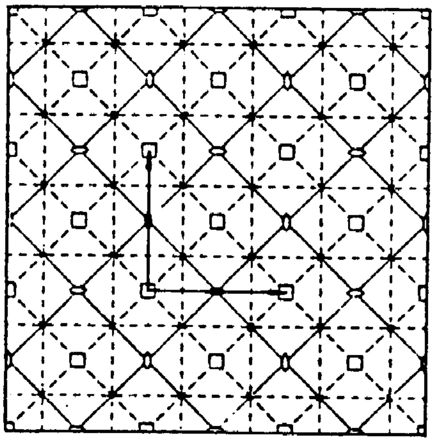
GRUPPE P4

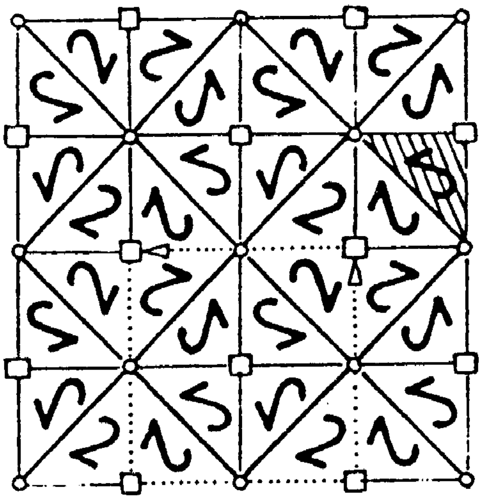






GRUPPE P4M



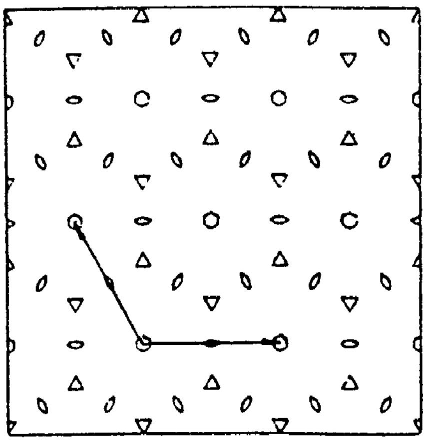


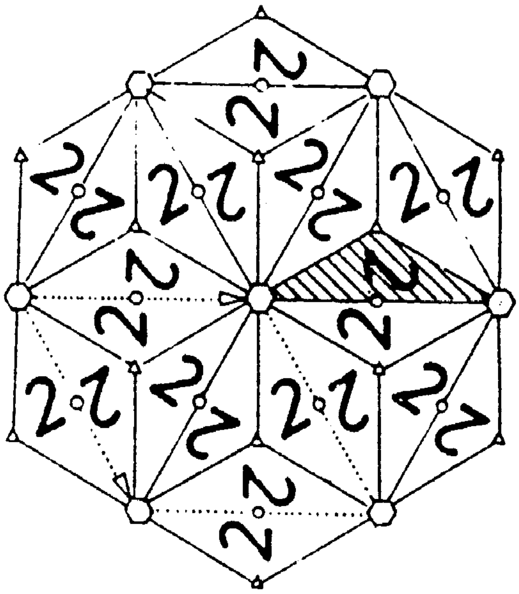
GRUPPE P4G

d) Gruppen mit sechszähligen Drehzentren: P6, P6M

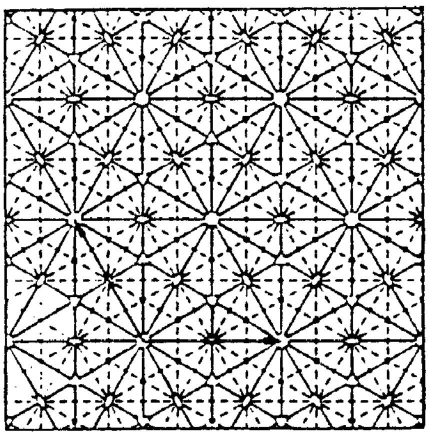
Die **Gruppe P6** ist eine Kombination der Gruppen P2 und P3. Die sechszähligen Drehzentzren bilden ein hexagonales Gitter mit den Dimensionen des Translationsgitters. Die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreicke sind dreizählige Drehzentren, die Seitenmittelpunkte zweizählige Drehzentren.

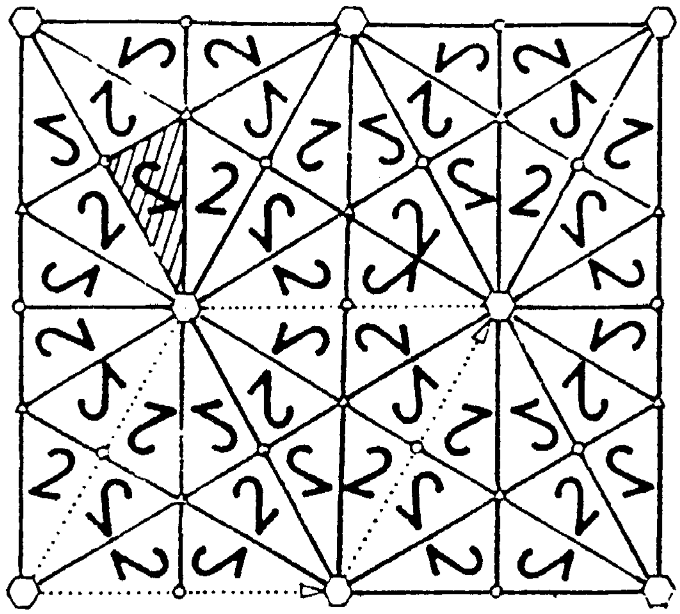
Daneben gibt es nur die **Gruppe P6M**, die als Kombination von P6, P3M1 und P31M zusätzlich zu den Symmetrieelementen von P6 sechs Scharen Spiegelachsen und sechs Scharen Gleitachsen enthält.





GRUPPE P6





GRUPPE P6M

3) ORNAMENTE UND TURTLEGEOMETRIE :

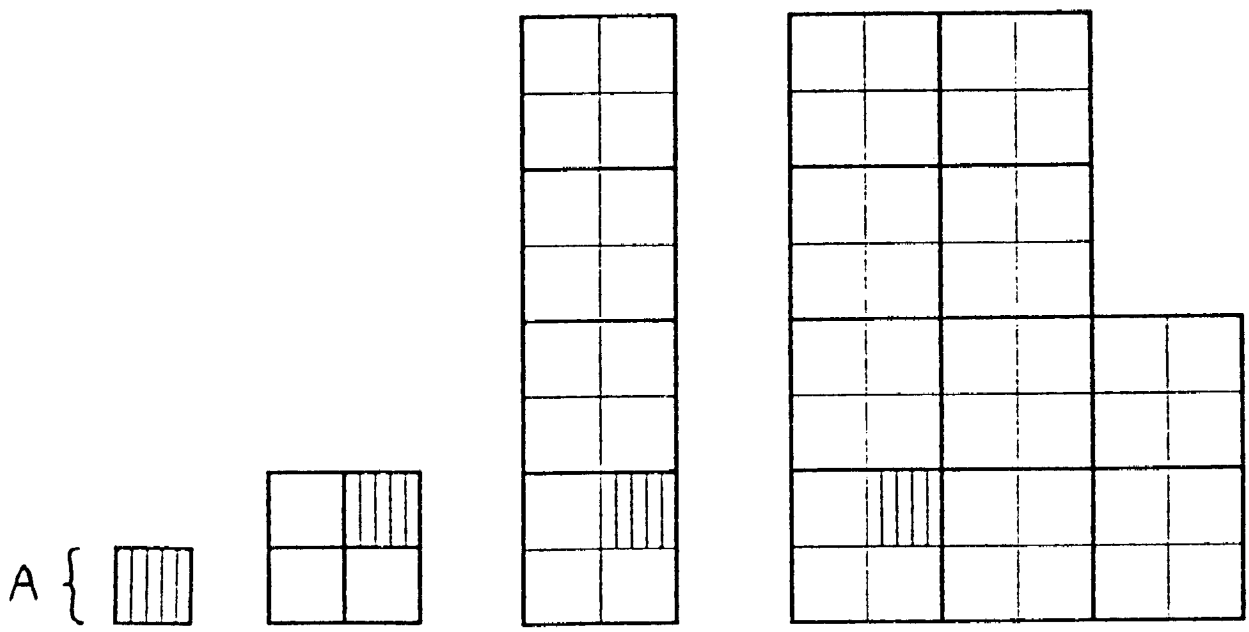
Kennt man die Symmetriekarten und die daraus resultierenden Fundamentalbereiche der einzelnen Ornamentgruppen, so so kann man mit den Befehlen der Turtlegeometrie Ornamente relativ einfach auf dem Computerbildschirm erzeugen.

Besonders leicht lassen sich Drehungen und Schiebungen mit Turtlegeometrie realisieren: Ist durch FIGUR ein Streckenzug in Relativkoordinaten festgelegt, so bewirkt der Befehl RT n FIGUR bzw FD n FIGUR, daß derselbe Streckenzug in gedrehter oder verschobener Lage gezeichnet wird.

Alle Ornamente der acht symmetriereichsten Ornamentgruppen, dh jener Gruppen, die mindestens dreizählige Drehzentren besitzen, kann man aber mit Hilfe von Drehungen und Schiebungen allein erzeugen: Man definiert das Ornament auf dem gesamten Fundamentalbereich der Gruppe P3,P4 bzw P6 und berückischtigt, daß dieser im Fall der Gruppen P3M1, P31M, P4M, P4G oder P6M eine Symmetrieachse enthält. Durch Drehen und Schieben dieses Fundamentalbereichs erhält man dann eine Parkettierung des Bildschirms, in der sich die Anordnung aller anderen Symmetrieelemente der jeweiligen Gruppe von selbst ergibt:

a) Ornamente mit vierzähliger Drehsymmetrie:

Die Symmetriekarten zeigen, daß die Translationsgitter dieser Ornamentgruppen quadratisch sind. Ausgehend von einem Quadrat mit Seitenlänge A erhält man folgendermaßen eine Parkettierung des Bildschirms:

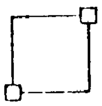


ORNAMENT GRUNDMUSTER REIHE4 PARKETT4

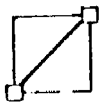
```
TO ORNAMENT
 (Festlegen eines Ornaments durch einfache Befehle der
 Turtlegeometrie, wobei sich die Turtle zu Beginn und bei
 Verlassen dieser Prozedur an derselben Stelle befindet,
 in der Position Penup ist und nach oben zeigt)
END

TO GRUNDMUSTER4
REPEAT 4 [ORNAMENT RT 90]
END

TO REIHE4
REPEAT :N2 [GRUNDMUSTER4 FD :A*2]
END

TO PARKETT4 :A
MAKE "N1  INT(BREITE/4/:A)
MAKE "N2  INT(HÖHE/2/:A)
PU SETPOS SE XO+:A  YO+:A
REPEAT :N1 [REIHE4 BK :A*2 RT 90 FD :A*2 RT 90 REIHE4
BK :A*2 LT 90 FD :A*2 LT 90]
END
```

Die numerischen Werte für BREITE bzw. HÖHE des Bildschirms sowie die Koordinaten (XO/YO) des linken unteren Eckpunkts des erzeugten Parketts müssen der verwendeten LOGO-Version entsprechend gewählt werden.

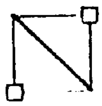
Durch die Definition von ORNAMENT wird gleichzeitig festgelegt, welcher der Klassen P4, P4M, P4G das erzeugte Parkett angehört:



P4



P4M

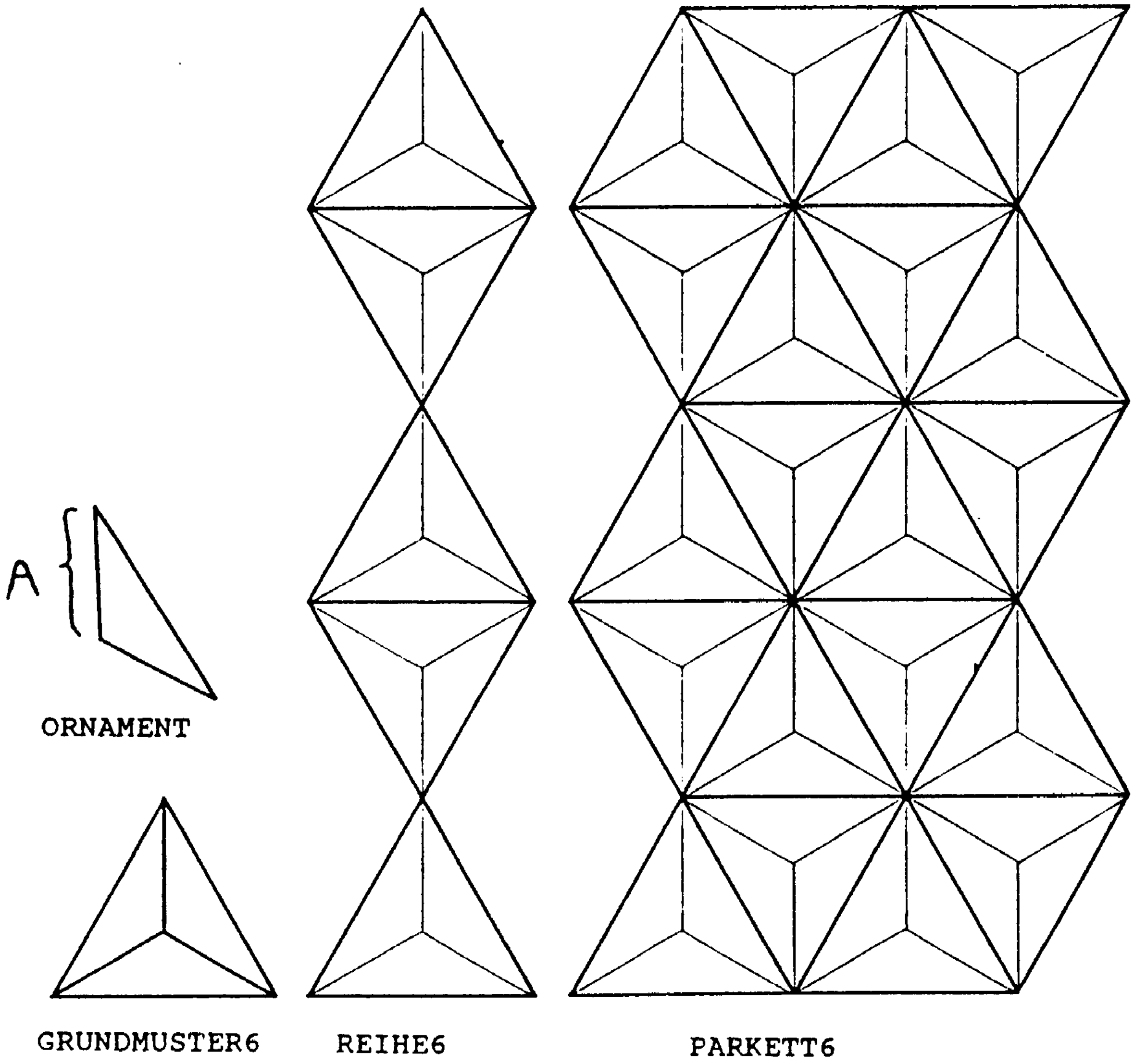


P4G

Ist keine der beiden Quadratdiagonalen Spiegelachse der eingegebenen Figur, so erhält man ein Ornament der Gruppe P4. Liegt die Figur symmetrisch zur Quadratdiagonale durch die beiden vierzähligen Drehzentren, so ergibt sich ein Ornament der Grupe P4M. Bei Symmetrie zur anderen Quadratdiagonale wird die Gruppe P4G erzeugt.

b) Ornamente mit sechszähliger Drehsymmetrie:

Hier kann man von einem gleichschenkeligen Dreieck mit Basiswinkel 30° und Schenkellänge A ausgehen. Liegt die eingegebene Figur symmetrisch zur Symmetrieachse dieses Dreiecks, so wird die Gruppe P6M erzeugt, andernfalls die Gruppe P6.

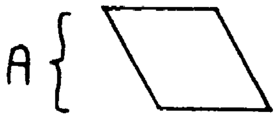



```
TO GRUNDMUSTER6
REPEAT 3 [ORNAMENT RT 120]
END

TO REIHE6
REPEAT :N2 [GRUNDMUSTER6 FD :A*2 RT 60 GRUNDMUSTER6 LT 60 FD :A]
GRUNDMUSTER6
END
```

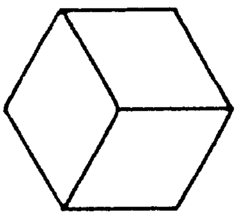
```
TO PARKETT6 :A
MAKE "N1  INT((BREITE-:A/2*SQRT3)/(:A*SQRT3))
MAKE "N2  INT((HÖHE-:A*1.5)/(:A*3))
PU SETPOS SE XO+:A/2*SQRT3 YO+:A/2
REPEAT :N1 [REIHE6 RT 60 FD :A RT 120 REIHE6 LT 60 FD :A LT 120]
END
```

c) Ornamente mit dreizähliger Drehsymmetrie:

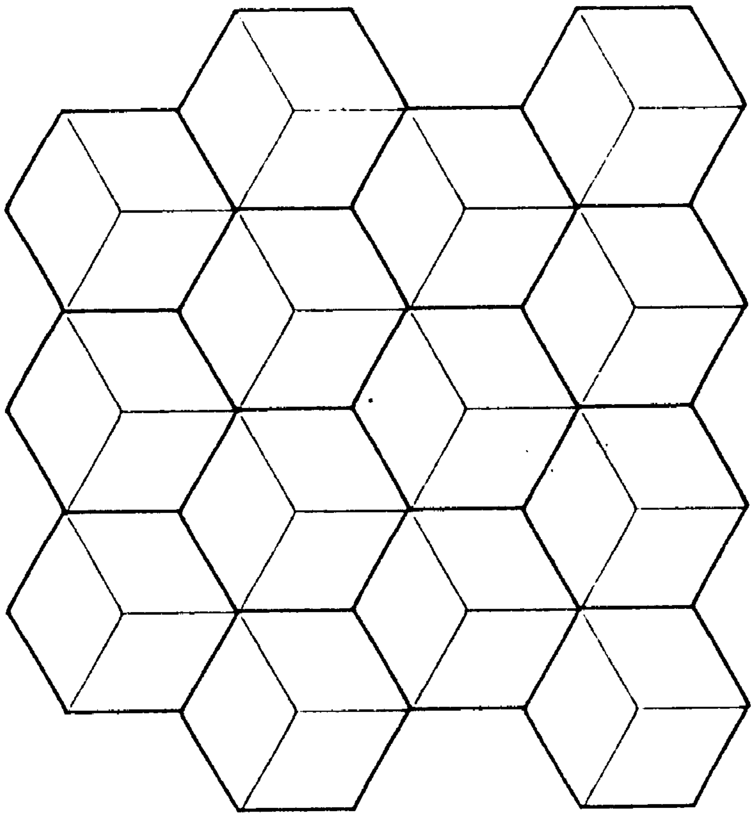
Fundamentalfigur ist hier ein aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzter Rhombus mit Höhe A :



ORNAMENT



GRUNDMUSTER3



PARKETT3

```
TO GRUNDMUSTER3
REPEAT 3 [ORNAMENT RT 120]
END

TO HINAUF3
REPEAT :N2-1 [GRUNDMUSTER3 FD :A*2]
BK :A*2 RT 60 FD :A*2 LT 60
END

TO HINAB3
REPEAT :N2 [GRUNDMUSTER3 BK :A*2]
FD :A*2 RT 60 FD :A*2 LT 60
END
```

```
TO PARKETT3 :A
MAKE "N1  INT((BREITE-A/SQRT3)/(:A*2*SQRT3))
MAKE "N2  INT(HÖHE/2/:A)
PU SETPOS SE  XO+2*:A/SQRT3  YO+:A*2
REPEAT :N1 [HINAUF3 HINAB3]
END
```

d) Ein interaktives Ornamentzeichenprogramm:

Als Ergänzung zu diesem Vortrag gibt es eine Diskette mit zwei LOGO-Files:

Das File PARKETTE enthält Parkettierungsprogramme für Ornamente mit 3-, 4- bzw 6-zähliger Drehsymmetrie sowie das interaktive Ornamentzeichenprogramm START.

Das File ORNAMENT ist eine Sammlung von 83 Prozeduren, durch die konkrete Beispiele für Ornamente festgelegt sind. Diese sind mit O31, O32, O33,....,O321, O41, O42,....,O431, O61, O62,....O631 bezeichnet. Die erste Ziffer nach dem Buchstaben O deutet darauf hin, daß dieses Muster besonders gut für eine Parkettierung mit 3-, 4- bzw 6-zähliger Drehsymmetrie geeignet ist. Günstige Werte für die Größe A der Fundamentalfigur der einzelnen Ornamente sind im File ORNAMENT in Form von Propertylisten gespeichert.

Nach dem Laden der beiden Files (LOAD "ORNAMENT LOAD "PARKETTE) ruft man die Prozedur START auf. Man wird dann aufgefordert, den Namen des zu zeichnenden Ornaments einzutippen. Ist eine Prozedur dieses Namens in der Sammlung ORNAMENT vorhanden, so macht der Computer einen Vorschlag für die relative Größe A der Fundamentalfigur. Ist keine Prozeder dieser Bezeichnung gespeichert, so wird man aufgefordert, durch Eingabe einer Befehlsliste ein neues Ornament zu definieren. Dadurch wird automatisch eine Prozedur dieses Namens erzeugt, die die eingegebene Befehlsliste enthält. Auch der anschließend zu wählende A-Wert wird in einer Propertyliste gespeichert und steht bei einem späteren Aufruf dieses neuen Ornaments zur Verfügung.

Um Rundungsfehler gering zu halten, sind die Parkettierungsprogramme so verfaßt, daß eine Standardlänge L frei wählbar ist und die relative Größe A der Fundamentalfigur in Vielfachen von L ausgedrückt wird.

```
?START
DU KANNST GESPEICHERTE ORNAMENTE
ZEICHNEN ODER NEUE ORNAMENTE DEFINIEREN
NAME DES ORNAMENTS:O68
MEIN VORSCHLAG FÜR DIE GRÖSSE
DER FUNDAMENTALFIGUR: A = L *5(J / N) ?J
STANDARDLÄNGE: L =4
SYMMETRIEPYP 3 .4 ODER 6 ?6
WILLST DU DEN GANZEN BILDSCHIRM, (G)
NUR DIE LINKE HÄLFTE (L)
ODER NUR DIE RECHTE HÄLFTE (R)
PARKETTIEREN ? :L
BILDSCHIRM LÖSCHEN ? (J / N) :J
NOCH EIN PARKETT ZEICHNEN? (J / N)J
DU KANNST GESPEICHERTE ORNAMENTE
ZEICHNEN ODER NEUE ORNAMENTE DEFINIEREN
NAME DES ORNAMENTS:MARIA
"MARIA"KENNE ICH NICHT
NEUES ORNAMENT DEFINIEREN:
GIB EINE BEFEHLSLISTE EIN:
PD FD :L*3 RT 90 FD :L*SQRT 3 PU BK :L*SQRT 3 LT 90 BK :L*3
GIB DIE GRÖSSE DER FUNDAMENTALFIGUR AN:
A = L *3
STANDARDLÄNGE: L =5
SYMMETRIEPYP 3 .4 ODER 6 ?3
WILLST DU DEN GANZEN BILDSCHIRM. (G)
NUR DIE LINKE HÄLFTE (L)
ODER NUR DIE RECHTE HÄLFTE (R)
PARKETTIEREN ? :R
BILDSCHIRM LÖSCHEN ? (J / N) :N
NOCH EIN PARKETT ZEICHNEN? (J / N)N
BYE
```

Durch die anschließende Wahl des Symmetrietyps kann man zu jedem beliebigen Grundornament Parkette mit 3-, 4- oder 6-zähliger Drehsymmetrie erzeugen.

Schließlich kann man noch entscheiden, ob nur die linke Hälfte, nur die rechte Hälfte oder der ganze Bildschirm parkettiert werden soll. Dadurch ist es möglich, zwei verschiedene Parkettierungen nebeneinander darzustellen und miteinander zu vergleichen.

5) ABSCHLIESSENDE BEMERKUNGEN:

- Zum Plotten der meisten Illustrationen dieser Arbeit wurde eine von Mag. Gregor Lingl verfaßte LOGO-Erweiterung verwendet (siehe [11]), die es ermöglicht, LOGO-Graphik direkt auf einem HPGL-Plotter zu betreiben.

- Mein Dank gilt außerdem Frau Mag. Margit Schöffmann, die mir freundlicherweise gestattet hat, die aus 2ern gebildeten Beispiele für die 17 Ornamentgruppen in Abschnitt 2) aus ihrer Hausarbeit [5] zu entnehmen.

- Beiträge zur Theorie der Ornamentgruppen findet man in [1], [2], [3] und [5]; schöne Beispiele für Ornamente in [6], [7], [8], [9] und [10].

- Die im Anhang enthaltenen Ornamentbeispiele habe ich mit Hilfe des beschriebenen Ornamentzeichenprogramms erzeugt. Versuchen Sie, die einzelnen Ornamente zu klassifizieren und die jeweiligen Fundamentalfiguren zu identifizieren.

LITERATUR:

[1] Bongartz, "Farbige Parkette", Birkhäuser Verlag (1988)

[2] Jank, "Ornamentgruppen", Didaktikreihe der ÖMG, Heft 15, Seite 145 - 160 (1987)

[3] Klemm, "Symmetrien von Ornamenten und Kristallen", Springer-Verlag (1982)

[4] Polya, "Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene", Z. Krist. 60, Seite 278 - 282 (1924)

[5] Schöffmann, "Reguläre Parkettierungen in der Ebene", Hausarbeit aus Darst. Geometrie an der TU-Wien(1984)

[6] Angell, "Computer Geometric Art", Dover Publications (1985)

[7] Bourgoin, "Arabic Geometrical Pattern & Design", Dover Publications (1973)

[8] Locke, "Isometric Perspective Designs and how to create them", Dover Publications 1981)

[9] Turner, "Triad Optical Illusions and how to create them", Dover Publications (1978)

[10] Gillon, "Geometric Design and Ornament", Dover Publ.(1969)

[11] Lingl, "Geometrie am PC", Skriptum der Österr. Computer Gesellschaft, (1989)